Лекция 15

Тема: Теория интервального анализа. Возможности применения теории нечетких множеств и интервального анализа для описания различных видов неопределенности

Основные понятия интервального анализа. Определение, свойства, операции над интервалами.

В последние годы широкое распространение в вычислительной математике получили методы интервального анализа. Первоначально интервальные методы возникли как средство автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ и впоследствии превратились в один из разделов современной прикладной математики. При этом в основе лежала идея двусторонней аппроксимации, которая при учете погрешностей приводит к необходимости обобщения понятия вещественного числа, а именно, к понятию интервального числа. В монографии Мура, по существу, впервые были изложены последовательно основы нового направления в вычислительной математике. Последующие исследования показали, что методы интервального анализа могут служить не только для учета ошибок округления на ЭВМ, но и являются новыми аналитическими методами для теоретических исследований.

Непосредственное применение интервальных методов в вычислительных процессах позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они лежат в определенных интервалах. При этом в получаемые интервалы включаются и встречающиеся в процессе вычислений ошибки округлений. При точно определенных входных данных задачи получаемые интервалы содержат точное решение исходной задачи, и интервальный метод служит для учета ошибок аппроксимации и округлений.

Проблемы интервального анализа можно разделить на три группы: исследование самого множества интервальных чисел как некоторой математической структуры, применение интервальных методов к различным задачам прикладной математики (в частности, в последнее время наметились пути использования интервальных методов в задачах управления и экономики) и программирование интервальных методов.

Интервальные числа

Пусть R – множество всех вещественных чисел. Под интервалом [a, b], a ≤ b, всюду ниже, если не оговорено противное, понимается замкнутое ограниченное подмножество R вида

$$[a, b] = \{x \mid x \in R \wedge a \le x \le b\}.$$

Множество всех интервалов обозначим через I (R). Элементы I (R) будем записывать прописными буквами. Если A – элемент I (R), A ∈ I (R), то его левый и правый концы будем обозначать как $\underline{a}$, $\overline{a}$: A = [$\underline{a}$, $\overline{a}$]. Элементы I (R) называются также интервальными числами. I

Символы ∈, ∩, ⊂ и т.п. понимаются в обычном теоретико-множественном смысле, причем ⊂ обозначает не обязательно строгое включение, т.е. соотношение A ⊂ B допускает равенство интервалов. Два интервала A и B равны тогда и только тогда, когда a = b, $\overline{a}$ = $\overline{b}$.

Отношение порядка на множестве I (R) определяется следующим образом: A < B тогда и только тогда, когда $\overline{a}$ < b. Возможно также упорядочение по включению: A не превосходит B, если A ⊂ B.

Пересечение $A \cap B$ интервалов A и B пусто, если $A < B$ или $B < A$, в противном случае $A \cap B = [\max\{a, b\}, \min\{\overline{a}, \overline{b}\}]$ – снова интервал.

Симметричным, по определению, является интервал $[a, \overline{a}]$, у которого $-a=\overline{a}$.

Шириной ω (A) интервала A называется величина $\overline{a} - a$:

$$\omega(A) = \overline{a} - a.$$

Середина m (A) есть полусумма концов интервала A:

$$m(A) = (a + \overline{a})/2.$$

Абсолютная величина |A| определяется как

$$|A| = \max\{|a|, |\overline{a}|\}.$$

Наконец, $\mu(A) = \min\{|a|, |\overline{a}|\}$, $S(A) = (|a| + |\overline{a}|)/2$. Нетрудно заметить, что $|A| \le |B|$, $\omega(A) \le \omega(B)$, когда $A \subset B$, причем $\omega(A) < \omega(B)$, если $A \subset B$ и $A \ne B$.

Расстояние $\rho(A, B)$ между элементами $A, B \in I(R)$ вводится равенством

$$\rho(A, B) = \max\{|a - b|, |\overline{a} - \overline{b}|\}.$$

Вырожденный интервал, т.е. интервал с совпадающими концами $a = \overline{a} = a$, отождествим с вещественным числом a. Таким образом, $R \subset I(R)$.

Интервальная арифметика

Арифметические операции над интервальными числами определяются следующим образом. Пусть $* \in \{+, -, \cdot, /\}$, $A, B \in I(R)$. Тогда

$$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\},$$

причем в случае деления $0 \notin B$.

Легко проверить, что определение (4) эквивалентно соотношениям

$A + B = [a, \overline{a}] + [b, \overline{b}] = [a + b, \overline{a} + \overline{b}]$,

$A - B = [a, \overline{a}] - [b, \overline{b}] = [a - \overline{b}, \overline{a} - b]$,

$A \cdot B = [a, \overline{a}] \cdot [b, \overline{b}] = [\min\{ab, a\overline{b}, \overline{a}b, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{ab, a\overline{b}, \overline{a}b, \overline{a}\overline{b}\}]$,

$A / B = [a, \overline{a}] / [b, \overline{b}] = [a, \overline{a}] \cdot [1/\overline{b}, 1/b]$.

Заметим, что операцию вычитания можно выразить через сложение и умножение, положив $-B = (-1)B = [-1, -1]B$ и $A - B = A + (-B)$.

В зависимости от знаков чисел $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ правило (7) для интервального умножения будет выглядеть так (мы полагаем $[c, \overline{c}] = [a, \overline{a}] \cdot [b, \overline{b}]$):

1) $a \ge 0, b \ge 0$: $c = ab$, $\overline{c} = \overline{a}\,\overline{b}$;

2) $a \ge 0$, $\overline{b} \le 0$: $c = \overline{a}b$, $\overline{c} = a\overline{b}$;

3) $\overline{a} \le 0$, $b \ge 0$: $c = a\overline{b}$, $\overline{c} = \overline{a}b$;

4) $\overline{a} \le 0$, $\overline{b} \le 0$: $c = \overline{a}\,\overline{b}$, $\overline{c} = ab$;

5) $a < 0 < \bar{a}$, $b \geq 0$: $c = a\bar{b}$, $\bar{c} = \bar{a}\bar{b}$;

6) $a < 0 < \bar{a}$, $\bar{b} \leq 0$: $c = \bar{a}b$, $\bar{c} = ab$;

7) $a \geq 0$, $b < 0 < \bar{b}$: $c = \bar{a}b$, $\bar{c} = \bar{a}\bar{b}$;

8) $\bar{a} \leq 0$, $b < 0 < \bar{b}$: $c = a\bar{b}$, $\bar{c} = ab$;

9) $a < 0 < \bar{a}$, $b < 0 < \bar{b}$: $c = \min\{a\bar{b}, \bar{a}b\}$,
$\bar{c} = \max\{ab, \bar{a}\bar{b}\}$.

Отсюда видно, что только в одном (последнем) случае для нахождения произведения требуется четыре умножения, а в остальных достаточно двух умножений.

Если A и B – вырожденные интервалы, то равенства (5) – (8) совпадают с обычными арифметическими операциями над вещественными числами. Таким образом, интервальное число есть обобщение вещественного числа, а интервальная арифметика – обобщение вещественной.

Из определения (4) непосредственно видно, что интервальные сложение и умножение ассоциативны и коммутативны, иначе говоря, для $A, B, C \in I(R)$ имеют место равенства

$$A + (B + C) = (A + B) + C,\ A + B = B + A,$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,\ A \cdot B = B \cdot A.$$

Роль нуля и единицы играют обычные 0 и 1, которые, как отмечалось, отождествляются с вырожденными интервалами [0, 0], [1, 1]. Другими словами,

$$A + 0 = 0 + A = A, \quad A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$$

для любого $A \in I(R)$.

Равенство (4) (как, впрочем, и (5) – (8)) показывает, что если один из операндов является невырожденным интервалом, то и результат арифметической опреации также невырожденный интервал. Исключение составляет умножение на 0 = [0, 0]. Отсюда, в частности следует, что для невырожденного интервала A не существует обратных по сложению и умножению элементов, так как если $A + B = 0$, $AC = 1$, то A, B, C должны быть в силу сказанного вырожденными. Короче, вычитание не обратно сложению, деление не обратно умножению. Значит, $A - A \neq 0$, $A/A \neq 1$, когда $\omega(A) > 0$. Понятно, однако, что всегда $0 \in A - A$, $1 \in A/A$.

Интервальные методы давно вышли за рамки чисто теоретического исследования и достаточно широко применяются на практике с помощью соответствующего программного обеспечения. В результате появились интервальная арифметика, интервальная алгебра, интервальная топология, интервальные методы решения задач вычислительной математики, оптимального управления, устойчивости и т.д.

Интервальный анализ относительно новое направление вычислительной математики широко используется для исследования свойств механических систем. Одним из основных требований, предъявляемых к качеству таких систем является требование устойчивости. Использование интервального анализа при решении задачи устойчивости динамики механических систем позволяет получить критерий гарантированной устойчивости. Но при применении интервальной математики исследователи испытывают трудности при решении громоздких интервальных уравнений, а также при решении получаются «сверхдостаточными», что при практике является жестким ограничением.

Возможности применения теории нечетких множеств и интервального анализа для описания различных видов неопределенности

Для реальных сложных систем характерно наличие одновременно разнородной информации:

1. точечных замеров и значений параметров;

2. допустимых интервалов их изменения;

3. статистических законов распределения для отдельных величин;

4. лингвистических критериев и ограничений, полученных от специалистов-экспертов и т.д.

Наличие в сложной многоуровневой иерархической системе управления одновременно различных видов неопределенности делает необходимым использование для принятия решений теории нечетких множеств, которая позволяет адекватно учесть имеющиеся виды неопределенности.

Соответственно и вся информация о режимах функционирования подсистем, областях допустимости и эффективности, целевых функциях, предпочтительности одних режимов работы перед другими, о риске работы на каждом из режимов для подсистем и т.д. должна быть преобразована к единой форме и представлена в виде функций принадлежности. Такой подход позволяет свести воедино всю имеющуюся неоднородную информацию: детерминированную, статистическую, лингвистическую и интервальную.

Разработанные в настоящее время количественные методы принятия решений (такие, как максимизация ожидаемой полезности, минимаксная теория, методы максимального правдоподобия, теория игр, анализ "затраты - эффективность" и другие) помогают выбирать наилучшие из множества возможных решений лишь в условиях одного конкретного вида неопределенности или в условиях полной определенности. К тому же, большая часть существующих методов для облегчения количественного исследования в рамках конкретных задач принятия решений базируется на крайне упрощенных моделях действительности и излишне жестких ограничениях, что уменьшает ценность результатов исследований и часто приводит к неверным решениям.

Применение для оперирования с неопределенными величинами аппарата теории вероятности приводит к тому, что фактически неопределенность, независимо от ее природы, отождествляется со случайностью, между тем как основным источником неопределенности во многих процессах принятия решений является нечеткость или расплывчатость (fuzzines).

В отличие от случайности, которая связана с неопределенностью, касающейся принадлежности или непринадлежности некоторого объекта к нерасплывчатому множеству, понятие "нечеткость" относится к классам, в которых могут быть различные градации степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и непринадлежностью объектов к данному классу.

Вопрос выбора адекватного формального языка является очень важным, поэтому следует отметить преимущества описания процесса принятия решений в сложной многоуровневой иерархической системе на основе теории нечетких множеств. Этот язык дает возможность адекватно отразить сущность самого процесса принятия решений в нечетких условиях для многоуровневой системы, оперировать с нечеткими ограничениями и целями, а также задавать их с помощью лингвистических переменных. Поэтому математический аппарат теории нечетких множеств принят в данной работе как основной аппарат описания многоуровневой иерархической системы, процессов принятия решений и контроля технологических процессов в сложных системах.

При наиболее абстрактном подходе к системе критерий функционирования этой системы на языке теории нечетких множеств можно представить в форме максимизации степени допустимости и эффективности принимаемых решений. Поэтому в качестве подмножества выбрано подмножество допустимых и эффективных значений параметра **x**. Подмножество эффективных значений параметра **x** является нечетким для реальных систем, так как нельзя сказать, что лишь одно значение, например $\mathbf{x_2}$ =4, является эффективным, а все остальные значения **x** неэффективны (рис.14.1), т.е. $\mu_A(4) = 1$ и $\mu_A(x) = 0$ для $x \neq 4$.

Реально такой грани нет, так как незначительное изменение **x** ведет лишь к небольшому изменению $\mu_A(x)$, поэтому функции принадлежности вида (1,2,3) больше соответствуют действительности. Так, применение выражения вида "должно быть близко к $\mathbf{x_2}$", которое не является точно сформулированной целью, может быть смоделировано нечетким подмножеством с функцией принадлежности (1).

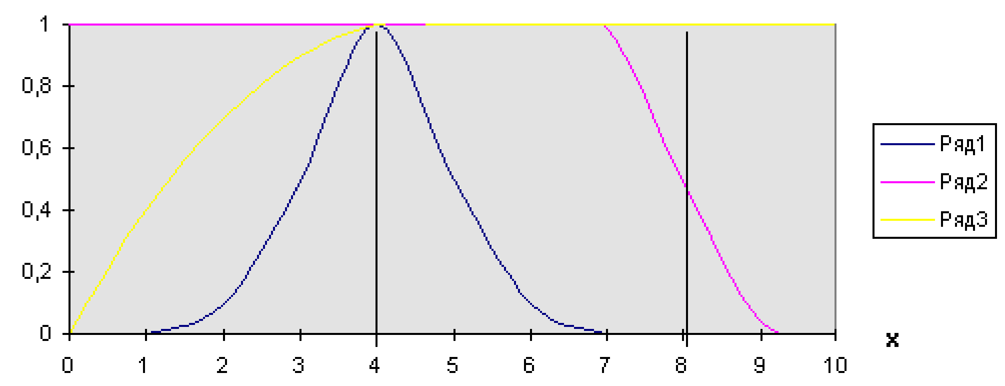

Рис. 14.1. Функции принадлежности для четких и нечетких целей и ограничений.

Ограничения на допустимость режима также могут быть четкими и нечеткими (2). Применение нечетких ("мягких") ограничений значительно расширяет возможность контроля и управления и делает их адекватными реальной обстановке в системе.

Например, можно жестко задать в системе газодобычи, что точка росы не может быть выше $\mathbf{x_1}$=8 и, таким образом, работа системы при $x > x_1$ недопустима.

Так жестко действует система автоматики и для нее режимы $x > x_1$ недопустимы. В действительности же точка росы не является такой резкой гранью (тем более в условиях большой погрешности ее определения), и работа системы в области $x > x_1$ возможна, только приводит к значительному снижению степени допустимости этого режима.

Функция принадлежности типа (2) больше соответствует этим условиям. Степень размытости (нечеткости) функции $\mu_A(x)$ задает жесткость ограничений или целей, т.е. фактически важность данного ограничения или цели для системы и точность их определения.

Во многих задачах контроля и управления сложной системой нет необходимости в получении оптимального четкого решения для каждого момента времени, так как затраты на накопление информации и жесткое устранение невязок в системе могут превышать достигаемый при этом эффект. Чаще всего конкретное содержание задачи требует обеспечения заданного уровня нечеткости решения.

Реальные задачи содержат в себе нечеткие условия и некоторую нечеткость цели в связи с тем, что их постановку осуществляет человек. Если искусственное введение четких ограничений и целей при рассмотрении одноуровневых одноцелевых систем позволяет получать неплохие детерминированные модели, то для иерархических систем необходимо рассматривать работу любой подсистемы с точки зрения ее связей с подсистемами на всех уровнях управления.

Учет фактора неопределенности при решении задач во многом изменяет методы принятия решения: меняется принцип представления исходных данных и параметров модели, становятся неоднозначными понятия решения задачи и оптимальности решения.

Наличие неопределенности может быть учтено непосредственно в моделях соответствующего типа с представлением недетерминированных параметров как случайных величин с известными вероятностными характеристиками, как нечетких величин с заданными функциями принадлежности или как интервальных величин с фиксированными интервалами изменения и нахождения решения задачи с помощью методов стохастического, нечеткого или интервального программирования.

Возможно также и прямое построение зоны неопределенности без непосредственного учета характеристик недетерминированных параметров модели. В этом случае решается ряд детерминированных задач и получается некоторый набор вариантов, оптимальных при конкретных значениях случайных (или нечетких) параметров.

Наиболее часто оказывается, что в процессе принятия решений для некоторых переменных или параметров модели могут быть заданы лишь диапазон их изменения (максимально и минимально допустимые значения $\overline{\mathbf{x}}$ и $\underline{\mathbf{x}}$) и наиболее правдоподобная оценка **x***.

В некоторых работах предлагается при оценке запасов нефти описывать каждую такую переменную как случайную величину с заданной функцией плотности треугольного распределения вероятности **f(x)** с линейным изменением **f(x)**на интервалах $\underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}^*$ и $\mathbf{x}^* < \mathbf{x} \le \overline{\mathbf{x}}$ и единичной площадью треугольника. Тогда в любой точке **x**значение плотности распределения вероятности **f(x)** может быть определено по формулам

$$\mathbf{f(x)} = \frac{2(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}})}{(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}^* - \underline{\mathbf{x}})} \text{ при } \underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}^*$$
,

$$
f(x) = \frac{2(x - \bar{x})}{(\bar{x} - \underline{x})(x^{*} - \bar{x})} \text{ при } x^{*} < x \le \bar{x}
$$
.

Наличие такого описания неопределенных величин позволяет затем по имеющимся моделям или отдельным формулам провести расчет соответствующей функции плотности распределения вероятности **f(y)** для любого оцениваемого параметра н с помощью метода Монте-Карло.

Например, пусть необходимо по уравнению материального баланса оценить объем пластовой воды V_e, вторгшейся в газовую залежь. Тогда, принимая, что величины запаса газа Ω и коэффициента газонасыщенности α являются случайными, можно определить плотность распределения вероятности $f(V_e)$ для объема вторгшейся воды. Такая запись оценки неизвестного параметра в условиях неопределенности гораздо более естественна, чем представление этой оценки в виде единственного точечного значения.

Однако в данном подходе на наш взгляд слишком искусственной является трактовка заданной таким образом переменной как случайной величины. Гораздо более естественным было бы описание этой переменной как нечеткой с трактовкой характеризующей ее функции с точки зрения принадлежности значения переменной к множеству возможных значений, т.е. как функции принадлежности.

В целом алгоритмы на базе нечетких множеств хорошо зарекомендовали себя на практике для самого разнообразного круга задач:

1. для создания математической модели многослойного оценивания запасов угля в пластах;

2. применение нечетких уравнений и элементов нечеткой логики для диагностирования сложных систем - пакет программ Thermix-2D для анализа динамики АЭС;

3. при управлении нестационарным процессом движения морских геолого-геофизических комплексов;

4. для оценки показателей качества программных средств;

5. в системах искусственного интеллекта для управления работой технологического оборудования (фирмы "Тексако кемиклз" и "Экссон кемиклз");

6. в задачах контроля и управления системами разработки месторождений, добычи и транспорта газа;

7. поведение диспетчерского персонала лучше всего описывается лингвистическими правилами поведения, а отклонение от принятых алгоритмов (ошибки и плохая работа диспетчеров, неисправности, возникшие помехи) хорошо моделируется с использованием нечетких алгоритмов.

Успешным является и применение теории нечетких множеств в стохастических системах. Это применение связано с тем, что для многих систем трудно получить точные значения вероятностных характеристик (например, вероятности отказов компонентов).

Трудности обусловлены изменением условий функционирования системы, уникальностью некоторых процессов (например, отказы таких компонентов, которые ранее вообще не отказывали). Поэтому предлагается вместо вероятностей отказа использовать понятие возможности отказа, т.е. некоторого нечеткого множества, определенного в вероятностном пространстве, которое включает вероятности отказа как предельный случай.

В случае отсутствия внутри допустимого интервала для различных коэффициентов уравнений, параметров и граничных условий любых предпочтений одного режима работы или оценки перед другими и наличия информации о переменных только в виде интервала допустимых значений, необходимо воспользоваться интервальным анализом.

При использовании нечетких или интервальных моделей становится возможным сравнение точности результатов, полученных для различных моделей. Анализируя интервалы или функции принадлежности для полученных в результате расчетов величин, можно доказать преимущество одной из моделей в данной ситуации (при $X_1 \subseteq X_2$). Например, необходимость применения в АСУ ТП разработки месторождений трехмерной модели пласта вместо двухмерной. На основе такого анализа могут быть построены блоки автоматического выбора модели в зависимости от неопределенности информации о коэффициентах моделей, граничных и начальных условий.

Таким образом, попытки применения какого-либо конкретного математического аппарата (интервального анализа, статистических методов, теории игр, детерминированных моделей и т.д.) для принятия решений в условиях неопределенности позволяет *адекватно отразить в модели лишь отдельные виды данных* и ***приводит к безвозвратной потере информации других типов.***

Так, например, при наличии детерминированных моделей не учитывается накопленная статистика о вероятностных распределениях для некоторых параметров, и производится замена этих распределений соответствующими средними значениями. Кроме того, в этом случае проявляется острый дефицит в информации конкретного типа (например, в функциях распределения вероятностей).

Ввиду недостатка информации для строгого применения вероятностных моделей и трудностей оперирования случайными величинами, а также в связи с тем, что с интервальными величинами можно работать в рамках теории нечетких множеств (ТНМ), последняя приобретает здесь важное значение.

Применение ТНМ позволяет провести также согласование различных нечетких решений при наличии нечетких целей, ограничений, коэффициентов, начальных и граничных условий.

Обычно на практике всегда имеется возможность наряду с точечной оценкой параметра (наиболее допустимым его значением) указать минимальное и максимальное значение (интервал), которые может принимать нечеткая величина. Кроме того, иногда удается построить и функцию, характеризующую допустимость каждого значения внутри заданного интервала на основе статистического материала или опроса группы экспертов. ТНМ дает возможность проводить вычисления не с одним точечным значением, а с характеристической функцией и получать в результате вычислений нечеткую величину, для которой по максимуму значения функции может быть получена точечная (четкая) оценка.

При необходимости форму обозначения **F** -множеств можно применять для обычных (четких) подмножеств из **A**. С учетом этого базовое множество и пустое подмножество могут быть записаны в виде

$$X = \langle 1, X \rangle, \quad \emptyset = \langle 0, \emptyset \rangle$$

Для операций над носителями нечетких множеств можно воспользоваться алгебраическими операциями интервального анализа (интервальной арифметики). Интервальный анализ предназначен для работы в условиях неопределенности с величинами, для которых задан лишь интервал допустимых или возможных значений

$$L = [a, b] = \{x \mid x \in X, a \le x \le b\}$$

Интервальная неопределенность представляется достаточно просто в виде нечеткого множества

$$A = \langle 1, \sigma(A) \rangle$$

Различие между нечеткостью и случайностью приводит к тому, что математические методы нечетких множеств совершенно не похожи на методы теории вероятностей. Они во многих отношениях проще вследствие того, что понятию вероятностной меры в теории вероятностей соответствует более простое понятие функции принадлежности в теории нечетких множеств. По этой причине даже в тех случаях, когда неопределенность в процессе принятия решений может быть представлена вероятностной моделью, обычно удобнее оперировать с ней методами теории нечетких множеств без привлечения аппарата теории вероятностей.

Получение во всех этих моделях решений в нечеткой форме позволяет довести до сведения специалиста, принимающего решение, что если он согласен или вынужден довольствоваться нечеткой формулировкой проблемы и нечеткими сведениями о модели, то он должен быть удовлетворен и нечетким решением задачи.